BANACHVERBANDSALGEBREN

DISSERTATION

dem Fachbereich Mathematik

der Eberhard–Karls–Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Laura Martignon

aus Bogotá

1978

78 534

BANACHVERBANDSALGEBREN

DISSERTATION

dem Fachbereich Mathematik

der Eberhard–Karls–Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Laura Martignon

aus Bogotá

1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	24. August 1978
Dekan:	Prof. Dr. W. Kaup
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. H. Schaefer
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. M. Wolff

FÜR ANNE

INHALTSVERZEICHNIS

1 Einleitung. 1

2 Präliminarien. 5

3 Banachverbandsalgebren 19

4 Starkreguläre Banachverbandsalgebren 33

5 Faltungsalgebren. 54

Literaturverzeichnis 59

1 Einleitung

Der Darstellungssatz von Stone ([1]), der C(K) als archimedisch geordnete kommutative Banachalgebra charakterisiert, ist der erste Vorläufer der Theorie von geordneten Algebren. Erst 1950 führt Birkhoff den Begriff der Verbandsalgebra ein, der ihm einen natürlichen Rahmen für die abstrakte Behandlung von Reynolds-Operatoren liefert. Letztere sind lineare, positive und multiplikative Operatoren auf reellen Funktionen.

In Fortführung dieser Arbeiten legten Birkhoff ([2]) und Pierce 1956 eine systematische Theorie der f-Ringe (Verbandsringe von Funktionen mit der punktweisen Ordnung und der punktweisen Multiplikation) vor, zu deren Motivation Birkhoff bemerkt: "Actually, the immediate impetus for the development of the theory of f-rings, was the desire to clarify the theory of Reynolds Operators..." (Fußnote zu Lattices in Applied Mathematics, P.S.P.M II).

In den sechziger Jahren erwachte das Interesse an der Wechselbeziehung zwischen Ordnung und Multiplikation erneut, zunächst bei der Untersuchung des Zentrums eines archimedisch geordneten Banachraumes und später bei der Charakterisierung kommutativer Faltungsalgebren (siehe Taylor [1]).

Erst 1974 führt Schaefer ([1]) den Begriff der Banachverbandsalgebra ein, um die Struktur von $\mathcal{L}^r(E)$ (dem Raum der regulären Operatoren auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E) zu beschreiben.
Eine Banachverbandsalgebra ist sowohl ein Banachverband als auch eine Banachalgebra, in der das Produkt positiver Elemente stets positiv ist.
Die Verschiedenheit der bislang untersuchten Banachverbandsalgebren, u.a. C(K) mit der punktweisen Multiplikation (Stone [1]), $\mathcal{M}(S)$ mit der Faltung (Taylor [1]) und $\mathcal{L}^r(E)$ mit der Komposition, motiviert den Versuch, eine umfassende Theorie zu formulieren, die diese Beispiele eingliedert und charakterisiert. Stellt man sich diese Aufgabe, so steht man vor der Entscheidung, ob man die Theorie der Banachalgebren oder die der Banachverbände als Ausgangspunkt wählt. Die Handlichkeit der Eigenschaften der Multiplikation (Bilinearität, Bipositivität) gegenüber denjenigen der Ordnung lassen uns vermuten, daß der Zugang über Banachverbände der einfachere sei.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, im Rahmen der Theorie der Banachverbände und positiver Operatoren den Versuch einer systematischen Untersuchung der Banachverbandsalgebren zu unternehmen. Wir werden dabei induktiv anhand der bekannten Beispiele vorgehen.

Es fällt bei C(K) mit der punktweisen Multiplikation auf, wie stark die algebraischen und verbandstheoretischen Strukturen ineinander verflochten sind: Der Betrag ist multiplikativ, der Verband der abgeschlossenen Ordnungsideale stimmt mit dem Verband der abgeschlossenen algebraischen Ideale überein und die algebraische Einheit ist zugleich die normierende Ordnungseinheit.

Diametral entgegengesetzt erscheint $\mathfrak{M}(S)$ mit der Faltung. Hier ist der Betrag nicht multiplikativ. Dagegen gilt eine Art Dekompositionseigenschaft der Intervalle bezüglich der Multiplikation (siehe (5 , 1.6)). Die Verbände der abgeschlossenen Ordnungsideale und der abgeschlossenen algebraischen Ideale sind grundsätzlich verschieden, und die algebraische Einheit, falls sie existiert, erzeugt ein eindimensionales Projektionsband.

Schwieriger zu fassen ist $\mathfrak{L}^r(E)$, doch auch hier, wie bei C(K) und $\mathfrak{M}(S)$, erzeugt die algebraische Einheit ein zu C(X) (für ein passendes Kompaktum X) isometrisch-isomorphes abgeschlossenes Ordnungsideal.
Diese Beobachtungen werden als Leitfaden dieser Arbeit dienen. Eine nach der anderen sollen die obengenannten Eigenschaften untersucht und die Banachverbandsalgebren charakterisiert werden, die sie erfüllen.
Im nächsten Kapitel werden wir einige Resultate über

Banachverbände zusammenstellen, die für die folgenden Untersuchungen grundlegend sind. Im dritten Kapitel führen wir Banachverbandsalgebren ein und diskutieren einige Beispiele. Im vierten Kapitel werden Banachverbandsalgebren mit multiplikativem Betrag untersucht. Diejenigen, die einen quasi-inneren Punkt im positiven Kegel und diejenigen, die eine algebraische Einheit besitzen, werden vollständig charakterisiert. Schließlich wird eine einfache Charakterisierung des Zentrums eines normierten Vektorverbandes gegeben. Aus dieser Charakterisierung ergeben sich Bedingungen, die garantieren, daß eine Banachverbandsalgebra sich als Funktionenverband mit der punktweisen Multiplikation darstellen läßt. Außerdem werden beliebige Banachverbandsalgebren mit einer algebraischen Einheit behandelt. Es wird gezeigt, daß sie stets ein zu $C(X)$ (für passendes Kompaktum $X \neq \phi$) isometrisch-isomorphes abgeschlossenes Ideal enthalten. Im fünften Kapitel wenden wir uns den Faltungsalgebren zu, wobei vor allem der Satz von Taylor im Zusammenhang der Banachverbandsalgebren dargestellt wird.

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. H. H. Schaefer für das Interesse, die Geduld und die Unterstützung, die er mir bei der Fertigstellung dieser Arbeit hat zuteil werden lassen. Mein Dank gilt auch dem Deutschen Akademischen Austauschdienst für die fünfjährige Förderung, die mein Studium an der Universität Tübingen ermöglicht hat.

2 Präliminarien

In diesem Kapitel geben wir die Grundlagen aus der Theorie der Banachverbände an, die für die vorliegende Untersuchung über Banachverbandsalgebren unerläßlich sind. Im wesentlichen handelt es sich um wohlbekannte Ergebnisse, die wir ohne Beweis aufführen. Einige weitere nützliche Resultate werden hergeleitet. Wir verwenden die Terminologie von Schaefer([1] und [2]).

§1. Darstellungssätze

Sei K ein kompakter topologischer Raum. Versehen mit der Supremumsnorm und der punktweise definierten Ordnung, ist der Raum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf K ein Banachverband, der mit C(K) bezeichnet wird. Die Klasse der Banachverbände vom Typ C(K) ist von Kakutani([1])und Krein([1]) charakterisiert worden:

1.1 Satz. Sei E ein AM-Raum mit Einheit (d.h. E ist ein Banachverband, dessen Norm $\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|$ für alle $x,y \in E_+$ erfüllt, und E besitzt eine Ordnungseinheit $e \in E_+$, mit $[-e,e] = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$).

Es existiert ein bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmter kompakter Raum K, so daß E als Banachverband zu C(K) isomorph ist. Unter dem Isomorphismus entspricht die Einheit von E der Einsfunktion 1_K von C(K).

Die Verbandsmorphismen der Klasse der Banachverbände vom Typ C(K) sind von Wolff([1])in einer Verallgemeinerung eines früheren Satzes von Ellis([1])beschrieben worden:

1.2 Satz. Seien K und L kompakte Räume und T ein Operator von C(K) in C(L), dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) T ist ein Verbandsmorphismus

(ii) Die Funktion $q := T(1_K)$ ist positiv und es existiert eine auf der Menge $U = \{t \in L \mid q(t) \neq 0\}$ stetige und eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi: L \to K$ mit $Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$ und alle $f \in C(K)$.

Als einfache Folgerung aus diesem Satz und dem Lemma von Urysohn ergibt sich:

1.3 Satz. Sei T ein Verbandsmorphismus von C(K) in C(L) mit $T(1_K) = q$ und $Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle

$t \in L$ und alle $f \in C(K)$. Ferner sei S ein Operator in dem von T erzeugten Ordnungsideal $\mathfrak{L}(C(K),C(L))_T$ und $q_S \in C(L)$ mit $S(1_K) = q_S$. Unter diesen Bedingungen gilt $Sf(t) = q_S(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$ und alle $f \in C(K)$.

Für Banachverbände mit einem quasi-inneren Punkt im positiven Kegel hat Lotz([1]) einen Darstellungssatz bewiesen. Es sei daran erinnert, daß ein Element $u \geq 0$ eines Banachverbandes E ein quasi-innerer Punkt von E_+ ist, falls das von u erzeugte Ordnungsideal E_u dicht in E liegt. Versieht man E_u mit der Eichfunktion des Intervalls $[-u, u]$ als Norm, so ist E_u ein AM-Raum mit Einheit, isomorph zu C(K) für ein passendes Kompaktum K. Der Darstellungssatz lautet:

1.4 Satz. Sei E ein Banachverband und u ein quasi-innerer Punkt von E_+ mit $E_u = C(K)$. E ist isomorph zu einem Vektorverband $\mathfrak{L}(K)$ stetiger numerischer Funktionen auf K, die jeweils die Werte $\pm\infty$ nur auf raren Teilmengen von K annehmen. Versieht man $\mathfrak{L}(K)$ mit der von E übertragenen Norm, so ist C(K) ein dichtes Ordnungsideal von $\mathfrak{L}(K)$ und diese Eigenschaft bestimmt K bis auf Homöomorphie. (Diese Formulierung stammt von Schaefer [3])

Die Teilmengen von K, auf denen die Funktionen von $\mathfrak{L}(K)$ die Werte $\pm\infty$ annehmen dürfen, wurden von Nagel

([1])und([2]) untersucht. Er definiert:

1.5 Definition. Sei E ein Banachverband und u ein quasi-innerer Punkt von E_+. Ferner sei E dargestellt (im Sinne von 1.4) als der Funktionenverband $\mathfrak{L}(K)$. Eine Teilmenge N von K heißt E-Nullmenge, falls eine Funktion $f \in \mathfrak{L}(K)$ mit $f(N) = \infty$ existiert.

Dann zeigt er, daß die so definierten E-Nullmengen einige wichtige Eigenschaften besitzen:

1.6 Satz. Sei E ein Banachverband und u ein quasi-innerer Punkt von E_+. Ferner sei E dargestellt (im Sinne von 1.4) als der Funktionenverband $\mathfrak{L}(K)$.

(i) Ist N eine E-Nullmenge, so existiert eine Folge $(f_n) \subseteq \mathfrak{L}(K)$ mit $\| f_n \| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n(t) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in N$.

(ii) Sei (f_n) eine Folge in $\mathfrak{L}(K)$ und $f \in \mathfrak{L}(K)$, so daß (f_n) in der von E übertragenen Norm gegen f konvergiert. Es existiert eine E-Nullmenge N in K, so daß für eine Teilfolge (f_m) von (f_n) $(f_m(t))$ gegen $f(t)$ für alle $t \in K \setminus N$ konvergiert.

(iii) Sei N ein E-Nullmenge in K. Jede stetige

Funktion auf K\N besitzt eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung zu einer Funktion von K in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

Die Verbandsmorphismen der Klasse der Banachverbände mit einem quasi-inneren Punkt im positiven Kegel können so charakterisiert werden:

1.7 Satz. Sei E bzw. F ein Banachverband, u bzw. v ein quasi-innerer Punkt von E_+ bzw. F_+. Seien E und F dargestellt (im Sinne von 1.4) als die Funktionenverbände $\mathfrak{X}(K)$ und $\mathfrak{Y}(L)$. Ferner sei $T: \mathfrak{X}(K) \longrightarrow \mathfrak{Y}(L)$ ein Verbandsmorphismus, $T(1_K) =: q$ und $U := \{t \in L : q(t) \neq 0\}$. Es existiert eine auf U stetige und eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi: L \longrightarrow K$, so daß $Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$ und alle $f \in \mathfrak{X}(K)$.

Wir skizzieren den Beweis:

Gilt $q \in C(L)$, so existiert nach (1.2) eine auf U stetige und eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi: L \longrightarrow K$ mit $Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$ und alle $f \in C(K)$. Ist $\varphi(N)$ eine E-Nullmenge in K, so ist auch $N \cap U$ eine F-Nullmenge in L, wie man leicht sieht: Es existiert eine Folge (f_n)

von Funktionen in $C(K)$ mit $\|f_n\| = 1$ und $Tf_n(t) > n$ für alle $t \in N \cap U$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Stetigkeit von T folgt, daß $N \cap U$ eine F-Nullmenge ist. Sei nun $f \in \mathfrak{L}(K)$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ für eine Folge (f_n) in $C(K)$. Dann gilt $Tf = \lim_{n\to\infty} Tf_n$ und, O.B.d.A. wegen (1.6), $Tf(t) = \lim_{n\to\infty} Tf_n(t)$ für alle t außerhalb einer F-Nullmenge N_1. Somit ist $Tf(t) = \lim_{n\to\infty} q(t)f_n(\varphi(t))$ für alle $t \notin N_1$ und, O.B.d.A. wegen (1.6), $\lim_{n\to\infty} q(t)f_n(\varphi(t)) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle t außerhalb einer F-Nullmenge N_2. Die Vereinigung $N_1 \cup N_2$ ist eine F-Nullmenge und für $t \notin N_1 \cup N_2$ gilt $Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$. Wegen (1.6) ist dann $Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$.

Sei nun q beliebig in $\mathfrak{T}(L)$. Wir definieren $h(t) = 1/(q(t) \vee 1_L(t))$ für alle $t \in L$. Die so definierte Funktion h ist beschränkt. Wir setzen $Sf = h \cdot Tf$ für alle $f \in \mathfrak{L}(K)$. Es ist klar, daß S ein Verbandsmorphismus ist, und $q_S := S(1_K) \in C(L)$. Es gilt also: $Sf(t) = q_S(t)f(\varphi(t)) = h(t)q(t)f(\varphi(t))$ für eine Abbildung $\varphi : L \longrightarrow K$ mit den geforderten Eigenschaften, alle $t \in L$ und alle $f \in C(K)$. Wegen ihrer Definition nimmt

h nur auf einer μ-Nullmenge N den Wert 0 an. Für alle $t \in L \setminus N$ gilt also $h^{-1}(t)Sf(t) = Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle $f \in \mathfrak{L}(K)$. Wegen (1.6) und der Stetigkeit von T und f gilt also $Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$ und $f \in \mathfrak{L}(K)$.

Als Korollar ergibt sich :

Korollar : Sei $T: \mathfrak{L}(K) \longrightarrow \mathfrak{L}(L)$ ein Verbandsmorphismus, dargestellt durch $Tf(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$ und alle $f \in \mathfrak{L}(K)$. Ist S ein Operator in dem von T erzeugten Ordnungsideal in $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(K), \mathfrak{L}(L))$ mit $S(1_K) = q_S$, so gilt $Sf(t) = q_S(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$ und alle $f \in \mathfrak{L}(K)$.

Als letztes sei an den Darstellungssatz von Kakutani für AL-Räume erinnert (siehe Schaefer[1] 2,85).

1.8 Satz. Sei E ein AL-Raum (d.h. E ist ein Banachverband mit $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in E_+$). Es existiert ein lokalkompakter Raum X und ein strikt positives Radon Maß μ auf X, so daß E als Banachverband zu $L^1(X,\mu)$ isomorph ist. Besitzt E eine schwache Ordnungseinheit, so kann man X kompakt wählen, derart daß der Isomorphismus $E \longrightarrow L^1(X,\mu)$ das Ordnungsideal E_u auf $L^1(X,\mu)$ abbildet.

§2. Das p-Tensorprodukt von Banachverbänden

Das p-Tensorprodukt von Banachverbänden wird sich als sehr nützlich für die Untersuchung der Multiplikation in Banachverbandsalgebren erweisen. Es wird uns erlauben, statt der Multiplikation einen positiven Operator zu betrachten, der alle ihre Eigenschaften widerspiegelt. Der Begriff des p-Tensorprodukts verallgemeinert das ε-Tensorprodukt von Banachverbänden vom Typ $C(K)$ und behält dessen starke universelle Eigenschaften. Er wurde von Schlotterbeck ([1]) eingeführt. Wir geben eine kurze Skizze seiner Konstruktion, deren vollständige Aufführung man bei Schlotterbeck ([1]) findet (vgl. auch Fremlin [1]).

Sei E ein Banachverband und $x \in E_+$. Mit der Eichfunktion des Intervalls $[-x, x]$ als Norm ist E_x ein AM-Raum mit Einheit, isomorph (wegen 1.1) zu einem Banachverband $C(K)$ für ein passendes Kompaktum K. Ist $x' \in E'_+$ und I der absolute Kern $\{ x \in E : \langle |x|, x' \rangle = 0 \}$, so ist die Vervollständigung von $E_{/I}$ bezüglich der Norm $\| x + I \| = \langle |x|, x' \rangle$ ein AL-Raum, den wir mit (E, x') bezeichnen. Wegen (1.8) ist (E, x') zu

einem Banachverband $L^1(X, \mu)$ isomorph.

Sei nun F ein weiterer Banachverband und T ein Operator in $\mathcal{L}(E, F)$. Ist T die Differenz zweier positiver Operatoren, so heißt T regulär. Mit der Norm $\|T\|_r = \inf\{\|T_1 + T_2\| \mid T = T_1 - T_2,\ 0 \leq T_1, T_2\}$ ist der Raum $\mathcal{L}^r(E, F)$ aller regulären Operatoren von E in F ein archimedisch geordneter Banachraum. Ist F ordnungsvollständig, so ist $\mathcal{L}^r(E, F)$ ein Banachverband. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt integral, wenn die Bilinearform $(x,y') \longrightarrow \langle Tx, y' \rangle$ eine stetige Linearform $b_T : E \tilde{\otimes}_\varepsilon F' \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert. Mit der Norm $\|T\|_i = \|b_T\|$ ist der Raum $\mathcal{J}(E, F)$ aller integralen Operatoren von E in F ein geordneter Banachraum. Für den speziellen Fall $E = C(K)$ und $F = L^1(X, \mu)$ gilt $\mathcal{L}^r(E, F) = \mathcal{J}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ nach Schaefer ([1] , 4, 5.3).

Ein anderer für uns wichtiger Begriff ist der des intervallerhaltenden Operators. Sind E und F Banachverbände und $T \in \mathcal{L}(E, F)$, so heißt T intervallerhaltend, falls $T([0,x]) = [0, Tx]$ für alle $x \in E_+$ gilt. Falls $T([0,x])$ in $[0,Tx]$ für alle $x \in E_+$ dicht liegt, so heißt T fast-intervallerhaltend. Zwischen den zwei Begriffen, Verbandsmorphismus und intervallerhaltender Operator, besteht eine Dualitätsbeziehung, die von Lotz ([2]) entdeckt worden ist:

2.1 Satz. Seien E und F Banachverbände und $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Es gelten folgende Äquivalenzen:

(i) T ist genau dann ein Verbandsmorphismus, wenn T' intervallerhaltend ist.

(ii) T ist genau dann fast-intervallerhaltend, wenn T' ein Verbandsmorphismus ist.

Als nächstes betrachten wir die Kategorie der Banachverbände vom Typ C(K) einmal mit den positiven Operatoren und einmal mit den Verbandsmorphismen als Morphismen. In beiden Fällen ist das ε-Tensorprodukt ein universelles Objekt. Die zwei folgenden von Lotz ([3]) stammenden Sätze erklären diese Aussage.

2.2 Satz. Seien K,L und M kompakte Räume und $b: C(K) \times C(L) \longrightarrow C(M)$ eine bipositive, bilineare Abbildung. Es existiert ein eindeutig bestimmter positiver Operator $T_b: C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L) \longrightarrow C(M)$, so daß $T_b(f \otimes g) = b(f,g)$ für alle $f \in C(K)$ und $g \in C(L)$ ist.

Beweis:

Für $f \in C(K)$ und $g \in C(L)$ setzen wir $T_b(f \otimes g) = b(f,g)$. Sei $\mu \in C(M)'_+$; die Abbildung $\mu \circ b: C(K) \times C(L) \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $\mu \circ b(f,g) = \langle T_b(f \otimes g), \mu \rangle$, ist bilinear und bipositiv. Daher ist der dazu assoziierte Operator von C(K) in C(L)' positiv und somit integral. Daraus

folgt $T_b'\mu \in (C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L)'')'$. Da $C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L)$ ein abgeschlossener Teilraum von $C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L)''$ ist, gilt $T_b'\mu \in (C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L))'$. Also ist $T_b'\mu \in (C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L))'$ für alle $\mu \in C(M)'$, da der positive Kegel von $C(M)'$ erzeugend ist. Wegen (Schaefer [2], 4, 7.4) ist T_b schwachstetig auf $C(K) \otimes_\varepsilon C(L)$ und deshalb stetig. Die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von T_b auf $C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L)$ bezeichnen wir wieder mit T_b. T_b ist positiv auf $(C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L))_+$, weil die konvexe Hülle der Menge $\{f \otimes g : f \in C(K)_+, f \in C(L)_+\}$ dicht in $(C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L))_+$ liegt.

2.3 Satz. Sei $b: C(K) \times C(L) \longrightarrow C(M)$ ein Verbandsbimorphismus, d.h., $f \longrightarrow b(f, g_o)$ und $g \longrightarrow b(f_o, g)$ seien Verbandsmorphismen für alle $f_o \in C(K)_+$ und $g_o \in C(L)_+$. Es existiert ein eindeutig bestimmter Verbandsmorphismus $T_b: C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L) \longrightarrow C(M)$, so daß $T_b(f \otimes g) = b(f,g)$ gilt für alle $f \in C(K)$ und $g \in C(L)$.

Beweis:

Sei $q = b(1_K, 1_L)$. Der Operator $T: C(L) \longrightarrow C(M)$ definiert durch $Tg = b(1_K, g)$, für $g \in C(L)$, ist ein Verbandsmorphismus. Es existiert also eine auf $U = \{t \in M : q(t) > 0\}$ stetige und eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi: M \longrightarrow L$ mit $Tg(t) = q(t)g(\varphi(t))$ für alle $t \in M$, $g \in C(L)$. Sei nun $f \in C(K)$. Der Operator von $C(L)$ in $C(M)$ gegeben durch $g \mapsto b(f,g)$ liegt

in dem von T erzeugten Ideal in $\mathcal{L}(C(L),C(M))$. Wegen (1.3) ist also $b(f,g)(t) = b(f,1_L)(t)\, g(\psi(t))$ für alle $t \in M$. Der Operator $f \mapsto b(f,1_L)$ von $C(K)$ in $C(M)$ ist e Verbandsmorphismus, weshalb eine auf U stetige und eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi: M \longrightarrow K$ existiert, so daß $b(f,1_L)(t) = q(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in M$ ist. Somit gilt $b(f,g)(t) = q(t)f(\varphi(t))\, g(\psi(t))$ für alle $t \in M$. Bekanntlich läßt sich $C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L)$ mit $C(K \times L)$ identifizieren. Der Operator $T_b: C(K \times L) = C(K) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(L) \longrightarrow C(M)$, definiert durch $T_b h(t) = q(t)h(\varphi(t),\psi(t))$ für alle $t \in M$, ist ein Verbandsmorphismus und $T_b(f \otimes g) = b(f,g)$ für alle $f \in C(K)$ und $g \in C(L)$. Die Eindeutigkeit von T_b ist klar.

Seien E und F Banachverbände, $x \in E_+$ und $y \in F_+$. Schlotterbeck ([1]) hat gezeigt, daß $E_x \tilde{\otimes}_\varepsilon F_y$ sich mit einem Unterverband von $\mathcal{L}^r(E',F)$ identifizieren läßt (ein Teilraum H eines geordneten Raumes G ist ein Unterverband von G, falls für alle $z,w \in H$ das Supremum $z \vee w$ in G existiert und $z \vee w \in H$ gilt). Dabei entspricht $x_1 \otimes y_1$, dem Operator $x' \mapsto \langle x_1,x' \rangle\, y_1$ in $\mathcal{L}^r(E',F)$ für alle $x_1 \in E_x$, $y_1 \in F_y$. Ist nun $0 \leq x \leq x_1$ und $0 \leq y \leq y_1$, so ist die kanonische Einbettung $i_{(x,y)(x_1,y_1)} : E_x \tilde{\otimes}_\varepsilon F_y \longrightarrow E_{x_1} \tilde{\otimes}_\varepsilon F_{y_1}$ ein Ver-

bandsisomorphismus, und natürlich ist

$i_{(x,y)(x_1,y_1)} \circ i_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)} = i_{(x,y)(x_2,y_2)}$

für $0 \leq x_1 \leq x_2$ und $0 \leq y_1 \leq y_2$. Die Familie

$\left\{ E_x \tilde{\otimes}_\varepsilon F_y : x \in E_+,\ y \in F_+ \right\}$, mit den Abbildungen

$\left\{ i_{(x,y)(x_1,y_1)} : 0 \leq x \leq x_1 \text{ in } E,\ 0 \leq y \leq y_1 \text{ in } F \right\}$ bildet ein induktives System von Unterverbänden von $\mathcal{L}^r(E',F)$. Wir nennen seinen induktiven Limes H. Für $(x,y) \in E_+ \times F_+$ bezeichne U_{xy} die Einheitskugel von $E_x \tilde{\otimes}_\varepsilon F_y$. Die in H gebildete konvexe Hülle der Familie

$\left\{ U_{xy} : (x,y) \in E_+ \times F_+ \right\}$ ist absolut konvex und absorbant. Daher definiert ihre Eichfuktion eine Norm auf H, die als p-Norm bezeichnet wird. Es ist leicht zu sehen, daß bezüglich der p-Norm $E \otimes F$ dicht in H und der projektive Kegel $C_p := \operatorname{co}\left\{ x \otimes y : (x,y) \in E_+ \times F_+ \right\}$ dicht in H_+ liegt.

Den Raum $E \otimes F$, versehen mit der p-Norm, wird mit $E \otimes_p F$ bezeichnet, seine Komplettierung $E \tilde{\otimes}_p F$. Offensichtlich liegt C_p in $(E \tilde{\otimes}_p F)_+$ dicht. Da $\mathcal{L}^r(E,F')$ sich als projektiver Limes der Familie $\mathcal{J}(E_x,(F',y))$ auffassen läßt, gilt $(E \tilde{\otimes}_p F)' = \mathcal{L}^r(E,F')$ (vgl. Schlotterbeck [1]). Wegen ihrer Konstruktion ist die p-Norm eine Verbandskreuznorm, d.h., $|x \otimes y| = |x| \otimes |y|$ und $\| x \otimes y \| = \| x \| \| y \|$ gilt für alle $x \in E$, $y \in F$. Ferner besitzt die p-Norm die folgenden universellen Eigenschaften:

2.4 Satz. Seien E,F und G Banachverbände und $b: E \times F \to G$ eine bipositive bilineare Abbildung. Es existiert ein eindeutig bestimmter positiver Operator $T_b: F \otimes_\rho F \to G$, so daß $T_b(x \otimes y) = b(x,y)$ für alle $(x,y) \in E \times F$ gilt.
Ist $b: E \times F \to G$ ein Verbandsbimorphismus, so existiert ein eindeutig bestimmter Verbandsmorphismus $T_b: E \tilde{\otimes}_\rho F \to G$, so daß $T_b(x \otimes y) = b(x,y)$ für alle $(x,y) \in E \times F$ gilt.

Korollar. Seien E und F Banachverbände. Es existiert ein eindeutig bestimmter positiver Operator $\Phi: E'' \tilde{\otimes}_\rho F'' \to (E \otimes_\rho F)'' = \mathcal{L}^r(E,F')'$, so daß $\langle \Phi(x'' \otimes y''), T \rangle = \langle x'', T'y'' \rangle$ für alle $x'' \in E''$, $y'' \in F''$ und $T \in \mathcal{L}^r(E,F')$ gilt.

Eine vollständige Behandlung des p-Tensorprodukts von Banachverbänden findet man bei Schlotterbeck ([1] , §2).

3 Banachverbandsalgebren

In diesem Kapitel führen wir Banachverbandsalgebren und die damit verbundenen Begriffe ein.
Im zweiten Abschnitt diskutieren wir einige Beispiele.
Für die Terminologie aus der Theorie der Algebren, bzw. Banachalgebren, siehe Birkhoff ([3]), bzw. Zelasko ([1]).

§1 Grundbegriffe

1.1 **Definition**. Sei E ein (reeller) Vektorverband und $* : E \times E \longrightarrow E$ eine binäre Verknüpfung. Das Paar $(E,*)$ heißt Verbandsalgebra, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $(x + x_1) * \lambda y = \lambda(x * y) + \lambda(x_1 * y)$
$\lambda x * (y + y_1) = \lambda(x * y) + \lambda(x * y_1)$
für alle $x,x_1,y,y_1 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. D.h., $*$ ist bilinear.

(ii) $x * y \geq 0$ für alle $x \geq 0$, $y \geq 0$ in E. D.h., $*$ ist bipositiv.

(iii) $x * (y * z) = (x * y) * z$ für alle $x,y,z \in E$. D.h., $*$ ist assoziativ.

Bemerkung 1. Die Bedingung (ii) ist zu (ii)' äquivalent:

(ii)' $|x * y| \leq |x| * |y|$ für alle $x,y \in E$.

Bemerkung 2. Eine Verbandsalgebra $(E,*)$ ist offensichtlich ein (reelle) Algebra. Die Verknüpfung $*$ ist eine bipositive Multiplikation auf E.

1.2 Definition. Sei $(E,*)$ eine Verbandsalgebra und F ein Unterverband von E. Gilt $x * y \in F$ für alle $x,y \in F$, so heißt $(F,*)$ Unterverbandsalgebra von $(E,*)$.

Sei $(E,*)$ eine Verbandsalgebra und L(E) der Raum der Operatoren von E in E, geordnet durch $T \geq 0$, falls $T(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ aus E gilt. Die rechts-(bzw. links-) reguläre Darstellung P (bzw.Λ):$E \to L(E)$, gegeben durch $Px(y) = x * y$ (bzw. $\Lambda x(y) = y * x$) für alle $x,y \in E$, ist ein positiver Operator. Mittels P läßt sich $(E,*)$ in natürlicher Weise als geordnete Algebra von Operatoren auf E darstellen.

1.3 Definition. Sei E ein normierter Vektorverband und $*$ eine Multiplikation auf E, so daß $(E,*)$ eine Verbandsalgebra ist. $(E,*)$ heißt normierte Verbandsalgebra, falls

(iv) $\|x * y\| \leq \|x\| \, \|y\|$ für alle $x,y \in E$ gilt.

Eine normierte Verbandsalgebra heißt Banachverbandsalgebra, falls E normvollständig ist.

Bemerkung 1 . Jede Banachverbandsalgebra ist sowohl ein Banachverband als auch eine Banachalgebra .

Bemerkung 2 . Bekanntlich ist jeder positive Operator auf einen Banachverband zwangsläufig stetig (siehe Schaefer [1] 5, 5.3) . Sei nun E ein Banachverband und $*$ eine bipositive Multiplikation auf E . Aus der Bipositivität ergibt sich die Existenz einer Konstanten $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}_+$, so daß $\|x * y\| \leq \lambda \|x\| \|y\|$ ist für alle $x,y \in E$. Diese Beobachtung beweist den folgenden Satz .

1.4 Satz . Sei E ein Banachverband und $*$ eine bipositive Multiplikation auf E . Es existiert ein Vielfaches $\lambda *$ $(\lambda \neq 0)$ von $*$ (gegeben durch $x (\lambda *) y = \lambda x * y$ für alle $x,y \in E$) , so daß $(E, \lambda *)$ eine Banachverbandsalgebra ist .

Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra . Wegen der Bipositivität von $*$ und (2 ,2.4) existiert ein eindeutig bestimmter positiver Operator von $E \tilde{\otimes}_\pi E$ in E , der $x \otimes y$ auf $x * y$ abbildet . Dies motiviert die folgende Definition .

1.5 Definition . Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra. Der zu $*$ assoziierte positive Operator $M: E \tilde{\otimes}_\pi E \longrightarrow E$

heißt der Multiplikationsoperator von $(E,*)$.

Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra . Wie wir in (2,2.4 Korollar) bemerkten , existiert ein positiver Operator $\Phi : E'' \tilde{\otimes}_p E'' \longrightarrow (E \tilde{\otimes}_p E)'' = \mathcal{L}^r(E,E')'$, so daß $\langle \Phi(x'' \otimes y''), T \rangle = \langle x'', T'y'' \rangle$ für alle $x'', y'' \in E''$ ist. Komponiert mit Φ , definiert die Biadjungierte von M einen positiven Operator von $E'' \tilde{\otimes}_p E''$ in E'' . Wie wir in dem folgenden Satz beweisen werden , definiert man auf diese Weise eine Multiplikation auf E'' , die auf E mit der ursprünglichen übereinstimmt .

1,6 Satz . Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra und $M : E \tilde{\otimes}_p E \longrightarrow E$ ihr Multiplikationsoperator . Ferner sei $\Phi : E'' \tilde{\otimes}_p E'' \longrightarrow (E \tilde{\otimes}_p E)'' = \mathcal{L}^r(E,E')'$ gegeben durch $\langle \Phi(x'' \otimes y''), T \rangle = \langle x'', T'y'' \rangle$ für alle $T \in \mathcal{L}^r(E,E')$ und $x'' \otimes y'' \in E'' \otimes E''$. Die Abbildung $*'' : E'' \times E'' \longrightarrow E''$, gegeben durch $\langle x'' *'' y'', x' \rangle = \langle \Phi(x'' \otimes y''), M'x' \rangle$ für alle $x' \in E'$, $(x'', y'') \in E'' \times E''$, definiert eine bipositive Multiplikation auf E''. Das Paar $(E,*'')$ ist eine Banachverbandsalgebra und $(E,*)$ ist eine Unterverbandsalgebra von $(E'',*'')$.

Beweis .

Sei $x' \in E'$ und $x \in E$. Wir definieren x'_x durch $\langle x'_x, y \rangle = \langle x', x * y \rangle$ für alle $y \in E$. Offensichtlich

bildet $M':E' \to \mathfrak{L}^r(E,E') = (E \overset{\vee}{\otimes}_\rho E)'$ das Element $x' \in E'$ auf den Operator $x \mapsto x'_x$ ab.

Sei nun $x' \in E'$ und $y'' \in E''$. Wir definieren $_{y''}x' \in E'$ durch $\langle {}_{y''}x', x\rangle = \langle y'', x'_x\rangle$ für alle $x \in E$.

Offensichtlich gilt: $(M'x')_{y''} = {}_{y''}x'$ für alle $y'' \in E''$.

Wir setzen nun $\langle x'' *'' y'', x'\rangle = \langle \Phi(x'' \otimes y''), M'x'\rangle = \langle x'', {}_{y''}x'\rangle$. Es ist klar, daß $*''$ bilinear und bipositiv ist. Ferner gilt $\|x'' *'' y''\| \leq \|x''\| \cdot \|y''\|$ für alle $x'', y'' \in E''$, wie man sich leicht überlegt.

Wir weisen nach, daß $*''$ assoziativ ist. Seien x'', y'' und z'' in E''. Wir zeigen: $\langle x'' * (y'' * z''), x'\rangle = \langle (x'' * y'') * z'', x'\rangle$ für alle $x' \in E'$. Dazu müssen wir verifizieren: $(y'' * z'')x' = y''({}_{z''}x')$. Sei $x \in E$, es ist $\langle x, (y'' * z'')x'\rangle = \langle y'', {}_{z''}(x'_x)\rangle$ und $\langle x, {}_{y''}({}_{z''}x')\rangle = \langle y'', ({}_{z''}x')_x\rangle$. Wir vergleichen also $({}_{z''}x')_x$ und ${}_{z''}(x'_x)$. Sei $y \in E$, es ist $\langle y, ({}_{z''}x')_x\rangle = \langle z'', (x'_x)_y\rangle$ und $\langle y, ({}_{z''}x')_x\rangle = \langle x * y, {}_{z''}x'\rangle = \langle z'', x'_{x*y}\rangle$. Es folgt aus der Assoziativität von $*$, daß $x'_{x*y} = (x'_x)_y$ ist. Somit ist die Assoziativität von $*''$ gezeigt.

Seien nun $x, y \in E$ und $x' \in E'$. Es gilt: $\langle x *'' y, x'\rangle = \langle x, {}_y x'\rangle = \langle y, x'_x\rangle = \langle x * y, x'\rangle$.

Wir haben bewiesen, daß $(E'', *'')$ eine Banachverbandsalgebra ist, und daß $*''$ auf E mit $*$ übereinstimmt.

Die in (1.6) konstruierte Multiplikation auf dem Biduat einer Banachverbandsalgebra nennen wir, in Übereinstimmung mit der Terminologie der Theorie der Banachalgebren (siehe z.B. Zelasko [1]), die Arens Multiplikation.
Eine einfache Rechnung beweist den folgenden Satz.

1.7 Satz. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra und $*''$ die Arens Multiplikation auf E''. $(E'', *'')$ ist genau dann kommutativ, wenn $(E,*)$ kommutativ ist.

Als nächstes führen wir die Morphismen der Klasse der Banachverbandsalgebren ein. Als natürlich erscheint die folgende Definition.

1.8 Definition. Seien $(E,*_E)$ und $(F,*_F)$ Banachverbandsalgebren und T ein Operator von E in F. T heißt Strukturmorphismus, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $T(x *_E y) = Tx *_F Ty$ für alle $x,y \in E$. D.h., T ist ein algebraischer Morphismus von $(E,*_E)$ in $(F,*_F)$

(b) $T(x \wedge_E y) = Tx \wedge_F Ty$ für alle $x,y \in E$. D.h., T ist ein Verbandsmorphismus von E in F.

Bemerkung. Jeder Strukturmorphismus ist positiv und somit stetig.

Ebenso natürlich wie (1.8) erscheint die folgende Definition der normalen Unterstrukturen einer Banachverbandsalgebra :

1.9 Definition . Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra und I ein linearer Teilraum von E . I heißt Strukturideal von $(E,*)$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind :

(a) $x * I = I * x = I$ für alle $x \in E$. D.h., I ist ein algebraisches Ideal von $(E,*)$

(b) aus $x \in I$ und $|y| \leq |x|$ folgt $y \in I$ für alle $x,y \in E$. D.h., I ist ein Ordnungsideal von E .

Sei I ein Strukturideal der Banachverbandsalgebra $(E,*)$. Versehen mit den kanonisch definierten Operationen ist E/I eine Verbandsalgebra . Ist I abgeschlossen , so ist E/I eine Banachverbandsalgebra in der Quotientennorm .Die Quotientenabbildung ist dann ein Strukturmorphismus im Sinne von (1.8). Eine Banachverbandsalgebra ohne nicht-triviale abgeschlossene Strukturideale werden wir einfach nennen.

Als letztes definieren wir den Begriff der Struktureinheit einer Banachverbandsalgebra .

1.10 Definition. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra. Ein Element $e \in E_+$ heißt Struktureinheit von E, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $x * e = e * x = x$ für alle $x \in E$. D.h., e ist die algebraische Einheit von $(E,*)$.

(b) $\|e\| = 1$ und aus $\|x\| \leq 1$ folgt $|x \leq e$ für alle $x \in E$. D.h., e ist die normierende Ordnungseinheit von E.

Bemerkung. Die Existenz einer Struktureiheit charakterisiert die Klasse der Banachverbandsalgebren vom Typ $(C(K),\cdot)$ (siehe 4, §4).

2 Beispiele

Versehen mit der üblichen Ordnung, der Norm definiert durch den Absolutbetrag, und der üblichen Multiplikation, ist $\mathbb{R}$ eine Banacchverbandsalgebra und der Isomorphietyp aller eindimensionalen Banachverbandsalgebren.
Schwieriger wird die Klassifikation der zweidimensionalen Banachverbandsalgebren (vgl. Birkhoff [2]). Bekakanntlich ist jeder zweidimensionale Banachverband isomorph zu $\mathbb{R}^2$ mit der Ordnung $\leq$, definiert durch den ersten Quadranten als positiven Kegel, und einer passenden Verbandsnorm. Wegen (1.4) reduziert sich die Klassifikation der zweidimensionalen Banachverbands-

algebren auf die Klassifikation aller verschiedenen bipositiven Multiplikationen auf $(\mathbb{R}^2, \leqq)$. Wir wählen die Basis $K = \{e_o = (1,0),\ e_1 = (0,1)\}$. Dann ist $x = x_o e_o + x_1 e_1 \geqq 0$ genau dann, wenn $x_o \geqq 0$ und $x_1 \geqq 0$ gilt. Sei * eine bipositive Multiplikation auf $(\mathbb{R}^2, \leqq)$ und $e_i * e_j = A_{ij} e_o + B_{ij} e_1$ mit $A_{ij}, B_{ij} \in R_+$ für $i,j \in \{0,1\}$, so ergeben sich aus der Assoziativität von * eine Reihe von Gleichungen, die das Verhalten der Koeffizienten $\{A_{ij}, B_{ij} : i,j \in \{0,1\}\}$ festlegen.

Als erstes betrachten wir den Fall, daß $A_{11} = 0$ und $B_{oo} = 0$ gilt. Man erhält dann : $A_{ij} = 0$ oder $B_{ij} = 0$ für alle Paare $(i,j) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$. Es gibt die folgenden Isomorphietypen.

2.1 Die triviale Verbandsalgebra

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o * e_1 = e_1 * e_o = e_1 * e_1 = 0.$

In den nächsten vier Fällen ist der Betrag multiplikativ, d.h., $|x * y| = |x| * |y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^2$.

2.2 Die nilpotente Verbandsalgebra

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_1,\ e_o * e_1 = e_1 * e_o = e_1 * e_1 = 0.$

2.3 Die Verbandsalgebra mit der punktweisen Multiplikation.

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o$, $e_o * e_1 = e_1 * e_o = 0$, $e_1 * e_1 = e_1$

Sie erfüllt $|x| * |y| = |x * y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^2$.

Versehen mit der Supremumsnorm besitzt sie die Struktureinheit $e_o + e_1$ und ist zu $(C(K),\cdot)$ isomorph (siehe 2.13).

2.4 Die zweite Verbandsalgebra mit multiplikativem Betrag.

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o$, $e_o * e_1 = e_1$, $e_1 * e_o = e_1 * e_1 = 0$.

Sie erfüllt $|x| * |y| = |x * y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^2$ aber ist als Algebra nicht zu 2.3 isomorph. Sie besitzt ein einziges echtes Strukturideal, nämlich $\mathbb{R}^2_{e_1}$.

2.4'. Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o$, $e_1 * e_o = e_1$, $e_o * e_1 = e_1 * e_1 = 0$.

2.5 Die dritte Verbandsalgebra mit multiplikativem Betrag.

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o$, $e_o * e_1 = e_1 * e_o = e_1 * e_1 = 0$.

Sie erfüllt $|x| * |y| = |x * y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^2$, aber, im Gegensatz zu 2.3 und 2.4 hat sie einen nicht trivialen Annullator, nämlich $\mathbb{R}e_1 = \mathbb{R}^2_{e_1}$.

In den nächsten vier Fällen handelt es sich um Halbgruppenalgebren.

2.6 Die Gruppenalgebra

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o$, $e_o * e_1 = e_1 * e_o = e_1$, $e_1 * e_1 = e_1$.

Als Algebra ist sie zu 2.3 isomorph, aber nicht als Verbandsalgebra: sie ist einfach und erfüllt $|x| * |y| = |x * y|$ nicht. Versehen mit der ℓ^1-Norm, ist sie zu $\mathcal{M}(C_2)$ mit der Faltung isomorph (siehe 2.13).

2.7 Die zweite Halbgruppenalgebra

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o * e_1 = e_1 * e_o = e_o$, $e_1 * e_1 = e_1$.

Als Algebra ist sie zu 2.3 und 2.6 isomorph, aber nicht als Verbandsalgebra: sie besitzt ein einziges echtes Strukturideal, nämlich $\mathbb{R}^2_{e_o}$. Versehen mit der ℓ^1-Norm ist sie zu $\mathcal{M}(S)$ mit der Faltung isomorph, wobei $S = \{a,b\}$ mit $a^2 = ab = ba = a, b^2 = b$ (siehe 2.13).

2.8 Die dritte Halbgruppenalgebra.

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_1 * e_o = e_o$, $e_o * e_1 = e_1 * e_1 = e_1$.

Als Algebra ist sie zu 2.6 isomorph, aber nicht als Verbandsalgebra: sie erfüllt nicht $|x| * |y| = |x * y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^2$. Sie ist einfach. Versehen mit der

ℓ^1-Norm ist sie zu $\mathcal{M}(S_1)$ mit der Faltung isomorph, wobei $S_1 = \{a,b\}$ mit $a^2=ba=a$, $ab=b^2=b$ (siehe 2.13).

2.8' Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o * e_1 = e_o$, $e_o * e_1 = e_1 * e_1 = e_1$.

2.9 Die vierte Halbgruppenalgebra

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o * e_1 = e_1 * e_o = e_1 * e_1 = e_o$.

Sie ist als Algebra isomorph zu 2.5, aber nicht als Verbandsalgebra, denn sie erfüllt nicht $|x| * |y| = |x * y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^2$. Versehen mit der ℓ^1-Norm ist sie zu $\mathcal{M}(E_2)$ isomorph, wobei E_2 die entartete Halbgruppe $\{a,b\}$ mit $a^2=ab=ba=b^2=a$ bezeichnet (siehe 2.13).

Das nächste Beispiel ist von besonderem Interesse.

2.10 Die Verbandsalgebra der dualen Zahlen.

Die Multiplikation ist gegeben durch:

$e_o * e_o = e_o$, $e_o * e_1 = e_1 * e_o = e_1$, $e_1 * e_1 = 0$.

Sie erfüllt nicht $|x| * |y| = |x * y|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^2$ und ist zu keiner Faltungsalgebra isomorph.

Sie besitzt ein einziges echtes Strukturideal, nämlich $\mathbb{R}^2 e_1$.

Als nächstes behandeln wir den Fall, daß $A_{11} > 0$ (oder $B_{oo} > 0$) ist. Daraus folgt, daß die Multiplikation kommutativ ist.

2.11 Seien a,b,c,d positive reelle Zahlen mit $d>0$ und $b - a(c-a)/d \geq 0$. Sei $*$ die Multiplikation definiert durch:

$e_o * e_o = (b - a(c-a)/d)e_o + (ab/d)e_1$,

$e_o * e_1 = e_1 * e_o = ae_o + be_1$ und $e_1 * e_1 = de_o + ce_1$.

Dann ist $*$ eine bipositive Multiplikation auf $(\mathbb{R}^2,\leq)$. Es gibt unendlich viele nicht isomorphe Verbandsalgebren $((\mathbb{R}^2,\leq),*)$, wobei $*$ wie oben (für feste Parameter a,b,c,d) definiert wird. Sei nämlich $*'$ definiert wie $*$ für die Parameter $a',b',c',d' \in \mathbb{R}_+$ anstelle von a,b,c,d. Ist $a = 0$ und $a' \neq 0$ so sind $((\mathbb{R}^2,\leq),*)$ und $((\mathbb{R}^2,\leq),*')$ nicht isomorph (dasselbe gilt für b,c,d). Seien a,b,c,d,a',b',c',d' strikt positiv. Bis auf Vertauschung von e_o und e_1, sind $((\mathbb{R}^2,\leq),*)$ und $((\mathbb{R}^2,\leq),*')$ genau dann isomorph, wenn $d' = da'b/ab'$ und $c' = a'c/a$ ist.

Diese Beispiele zeigen, wie vielfältig Banachverbandsalgebren sein können. Während es nur sieben assoziative zweidimensionale reelle Algebren gibt (siehe Birkhoff-Mac Lane [3], 7,11), gibt es unendlich viele nicht isomorphe zweidimensionale Banachverbandsalgebren.

Das Beispiel 2.3 mit der Supremumsnorm gehört zur Klasse der Banachverbandsalgebren vom Typ $(C(K),\cdot)$. Die Banachverbandsalgebra $(C(K),\cdot)$ wird folgendermaßen definiert:

2.12 C(K) mit der punktweisen Multiplikation.
Sei K ein kompakter topologischer Raum und C(K) der Banachverband aller reellwertigen stetigen Funktionen auf K (siehe 2, §1). Mit $\cdot$ bezeichnen wir die Multiplikation definiert durch $f\cdot g(t) = f(t)g(t)$ für alle $f,g \in C(K)$, $t \in K$. Wie man leicht sieht, ist $(C(K),\cdot)$ eine Banachverbandsalgebra. Sie besitzt die Struktureinheit 1_K, wobei $1_K(t) = 1$ für alle $t \in K$ ist. Außerdem gilt $|f\cdot g| = |f| \cdot |g|$ für alle $f,g \in C(K)$.

Die Beispiele 2.6, 2.7, 2.8 und 2.9 mit der ℓ^1-Norm gehören zur Klasse der Banachverbandsalgebren vom Typ $(\mathcal{M}(S), \blacktriangle)$. Die Banachverbandsalgebra $(\mathcal{M}(S), \blacktriangle)$ wird folgendermaßen definiert:

2.13 $\mathcal{M}(S)$ mit der Faltung.
Sei S eine kompakte Halbgruppe (für die Verknüpfung $(s,t) \mapsto st$ für alle $(s,t) \in S \times S$) und $\mathcal{M}(S)$ der Banachverband $C(S)'$ aller Radonmasse auf S.
Ferner sei $\blacktriangle : \mathcal{M}(S) \times \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)$ die Verknüpfung definiert durch $\langle f, \mu \blacktriangle \nu \rangle = \iint f(st)\,d\mu(s)\,d\nu(t)$ für alle $(\mu,\nu) \in \mathcal{M}(S) \times \mathcal{M}(S)$ und $f \in C(S)$. Die Verknüpfung $\blacktriangle$ ist eine bipositive Multiplikation auf $\mathcal{M}(S)$ und wird Faltung (auf S) genannt. Sie erfüllt $\|\mu \blacktriangle \nu\| \leq \|\mu\| \, \|\nu\|$ für alle $(\mu,\nu) \in \mathcal{M}(S) \times \mathcal{M}(S)$.
Wir werden uns mit den Eigenschaften der Banachverbandsalgebren $(\mathcal{M}(S), \blacktriangle)$ im Kapitel 5 beschäftigen.

4 Starkreguläre Banachverbandsalgebren

Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra und Λ (bzw. P) die links-(bzw. rechts-) reguläre Darstellung von $(E,*)$. Für jedes $a \in E_+$ ist Λa ein positiver (und somit stetiger) Operator auf E. Wir wollen nun den Fall untersuchen, daß Λa und Pa für jedes $a \in E_+$ Verbandsmorphismen sind.

1 Der allgemeine Fall

1.1 Definition. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra. $(E,*)$ heißt starkregulär, falls die Multiplikation ein Verbandsbimorphismus von $E \times E$ in E ist.

Es gibt eine Reihe von Bedingungen, die zur Starkregularität äquivalent sind:

1.2 Satz. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $(E,*)$ ist starkregulär.

(b) Λa und Pa sind Verbandsmorphismen für jedes $a \in E_+$.

(c) $|x * y| = |x| * |y|$ für alle $x,y \in E$.

(d) Der Multiplikationsoperator $M : E \tilde{\otimes}_p E \longrightarrow E$ ist ein Verbandsmorphismus.

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b) ist klar.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Wir haben $|x * y| = |x * (y^+ - y^-)| =$

$= |x * y^+ - x * y^-| = |x * y^+ + x * y^-| = |x| * |y|,$

da $|x * y^+| \wedge |x * y^-| = |x| * y^+ \wedge |x| * y^- =$

$= |x| * (y^+ \wedge y^-) = 0$ gilt.

(c) $\Rightarrow$ (d) ist klar.

Ebenso ist (d) $\Rightarrow$ (a) klar (wegen 2,2.4).

Korollar. Ist $(E, *)$ starkregulär, so existiert in $\mathcal{L}(E)$ für jedes $a \in E$ der Absolutbetrag $|\Lambda a|$ (bzw. $|Pa|$) von Λa (bzw. von Pa) und es gilt $|\Lambda a| = \Lambda|a|$ (bzw. $|Pa| = P|a|$). Somit ist $\Lambda(E)$ (bzw. $P(E)$) eine Unterverbandsalgebra von $\mathcal{L}(E)$, und Λ (bzw. P) ist ein Strukturmorphismus von $(E, *)$ auf $\Lambda(E)$ (bzw. $P(E)$).

Beweis.

Sei $a \in E$. Der Operator Λa gehört zu dem von $\Lambda|a|$ erzeugten Ordnungsideal in $\mathcal{L}(E)$. Sei nun $x \in E_+$. Der Operator Λa bildet E_x in $E_{x*|a|}$ ab. Wir identifizieren E_x mit $C(K)$, x mit 1_K, $E_{x*|a|}$ mit $C(L)$ und $x*|a|$ mit 1_L. Folglich existiert eine Abbildung $\varphi: L \longrightarrow K$, so daß $(f * a)(t) = (1_K * a)(t) f(\varphi(t))$ für alle $t \in L$ gilt (siehe 2, 1.8). Somit ist $\sup_{|f| \leq 1_K} |f * a| =$

$= \sup_{|f| \leq 1_K} |1_K * a \| f \circ \varphi| = |1_K * a| = 1_K * |a|$. Daraus folgt,

daß $|a|$ existiert und $|a'| = |a|$ gilt. Somit ist alles gezeigt.

Als nächstes geben wir einen analytischen Beweis für die Charakterisierung der Kommutativität von starkregulären Banachverbandsalgebren an.

1.4 Satz. Sei $(E,*)$ eine starkreguläre Banachverbandsalgebra. Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

(i) $x^2 \geq 0$ für alle $x \in E$.

(ii) $x * y = y * x$ für alle $x,y \in E$.

(iii) aus $x \perp y$ folgt $x * y = 0$ für alle $x,y \in E$.

Beweis.

Wir beweisen die Äquivalenz von (i),(ii) und (iii) für alle Elemente eines beliebigen Ordnungsideals E_z $(z > 0)$ von E. Wir identifizieren E_z mit $C(K)$ und E_{z*z} mit $C(L)$ für passende Kompakta K und L. Die Multiplikation * bildet $C(K) \times C(K)$ in $C(L)$ ab. Nach Voraussetzung ist * ein Verbandsbimorphismus. Es gibt also Abbildungen $\varphi,\psi : L \longrightarrow K$, so daß $f * g = (f\circ\varphi)(g\circ\psi)$ für alle $f,g \in C(K)$ (siehe den Beweis von (2,2.3)). Da $f^2 \geq 0$ für alle $f \in C(K)$ gilt, muß $\varphi = \psi$ sein. Ist $f \perp g$ in $C(K)$, so ist $f * g = (f\circ\varphi)(g\circ\varphi) = 0$. Somit ist (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) gezeigt. Wie man leicht sieht , muß $\varphi = \psi$ gelten , wenn (iii) erfüllt ist . Daraus folgt (i).

Sei jetzt E der Banachverband $C(K)$ für ein beliebiges Kompaktum K . Wir wollen die bipositiven Multiplikationen $* : C(K) \times C(K) \to C(K)$ untersuchen , für die $(C(K),*)$ eine starkreguläre Banachverbandsalgebra ist .

1.5 Satz . Sei K ein kompakter topologischer Raum und $* : C(K) \times C(K) \to C(K)$ eine bipositive Multiplikation , so daß $(C(K),*)$ eine starkreguläre Banachverbandsalgebra ist . Ferner sei q die Funktion $1_K * 1_K$ und U die offene Menge $\{t \in K: q(t) \neq 0\}$. Dann existieren Abbildungen $\varphi, \psi : K \to K$, auf U stetig und eindeutig definiert , so daß $f * g\,(t) = q(t)\, f(\varphi(t))\, g(\psi(t))$ für alle $f,g \in C(K)$, $t \in K$ gilt. Die Abbildungen φ und ψ erfüllen : $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi\psi = \psi\varphi$, $\psi^2 = \psi$ und $q \circ \varphi = q \circ \psi$ auf $\varphi(U) \cap U = \psi(U) \cap U$.

Beweis.

Die Existenz von φ und ψ von K in K, auf U stetig und eindeutig bestimmt, mit $f * g(t) = q(t)\, f(\varphi(t))\, g(\psi(t))$ für alle $f,g \in C(K)$ und $t \in K$, folgt aus (2, 2.3) .

Seien f,g und h Funktionen aus $C(K)$. Wegen der Assoziativität von $*$ gilt : $q(t)q(\varphi(t))f(\varphi^2(t))g(\varphi\psi(t))h(\psi(t)) =$
$= q(t)q(\psi(t))f(\varphi(t))g(\psi\varphi(t))h(\psi^2(t))$ für alle $t \in K$.
Ist $t \in \varphi(U) \cap U = \psi(U) \cap U$ und $f = g = h = 1_K$, so folgt $q(\varphi(t)) = q(\psi(t))$ .Mit $f = g = 1_K$ erhält man $\psi^2 = \psi$; aus $f = h = 1_K$ ergibt sich $\varphi\psi = \psi\varphi$ und $g = h = 1_K$ liefert $\psi^2 = \psi$.

Bemerkung . In (1.5) ist $\|q\| \leq 1$, da $(C(K),*)$ eine Banachverbandsalgebra ist .

Es ist leicht , eine Verallgemeinerung von (1.5) für starkreguläre Banachverbandsalgebren mit einem quasi-inneren Punkt im positivem Kegel zu beweisen .

1.6 Satz . Sei $(E,*)$ eine starkreguläre Banachverbandsalgebra , so daß der Banachverband E einen quasi-inneren Punkt im positiven Kegel besitzt . Ferner sei E dargestellt (im Sinne von 2, 1.4) als der Funktionenverband $\mathfrak{L}(K)$.
Ist $1_K * 1_K = q$ und U die Menge $\{ t \in K: q(t) \neq 0 \}$, so existieren Abbildungen $\varphi, \psi : K \to K$, auf U stetig und eindeutig definiert, so daß
$f * g(t) = q(t) f(\varphi(t)) g(\psi(t))$ gilt für alle $f,g \in \mathfrak{L}(K)$, $t \in K$. Die Abbildungen φ und ψ erfüllen : $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi\psi = \psi\varphi$, $\psi^2 = \psi$ und $q \circ \varphi = q \circ \psi$ auf $\varphi(U) \cap U = \psi(U) \cap U$.
Beweis .
Sei $T: \mathfrak{L}(K) \to \mathfrak{L}(K)$ der Operator definiert durch $T g = 1_K * g$ für alle $g \in \mathfrak{L}(K)$. Wegen (2 , 1.6) existiert eine Abbildung $\psi: K \to K$, auf U stetig und eindeutig bestimmt, so daß $Tg(t) = q(t) g(\psi(t))$ für alle $t \in K$ erfüllt ist. Der Operator $g \mapsto f * g$ liegt in dem von T erzeugten Ideal für jedes $f \in C(K)$. Somit gilt wegen (2, 1.7 Korollar) $f * g(t) = f * 1_K(t) g(\psi(t))$ für alle $g \in \mathfrak{L}(K)$.

Sei nun f beliebig in $\mathfrak{L}(K)$; es existiert eine Folge $(f_n) \subseteq C(K)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Für alle t außerhalb einer E-Nullmenge N_1 gilt $f * g(t) = \lim_{n\to\infty} (f_n * g)(t) =$ $= \lim_{n\to\infty} (f_n * 1_K)(t)g(\psi(t))$. Aber für alle t außerhalb einer E-Nullmenge N_2 gilt $\lim_{n\to\infty} (f_n * 1_K)(t)g(\psi(t)) =$ $(f * 1_K)(t)g(\psi(t))$. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung (2,1.6 (iii)) liefert dies $f * g(t) = (f * 1_K)(t)g(\psi(t))$ für alle $t \in K$.

Da der Operator $f \longmapsto f * 1_K$ ein Verbandsmorphismus von $\mathfrak{L}(K)$ in $\mathfrak{L}(K)$ ist, existiert $\varphi: K \to K$, auf U stetig und eindeutig bestimmt, so daß $f * 1_K(t) =$ $= q(t)f(\varphi(t))$ für alle $t \in K$ (2, 1.7) gilt. Somit ist $f * g(t) = q(t)f(\varphi(t))g(\psi(t))$ für alle $f,g \in \mathfrak{L}(K)$ und $t \in K$. Der Rest der Behauptung folgt, wie in (1.5), unmittelbar aus der Assoziativität von $*$.

Korollar 1. In der Situation von (1.6) sei $\varphi\psi(U) \cap U = \psi\varphi(U) \cap U$ eine E-Nullmenge. Dann ist $(E,*)$ nilpotent.

Beweis.

Sei $f \in \mathfrak{L}(K)$ und $t \in K$. Ein Faktor des Ausdrucks $f^4(t)$ ist $q(\varphi\psi(t))$. Ist $\varphi(\psi(U)) \cap U$ eine E-Nullmenge, so ist $f^4 = 0$ für alle f aus einem dichten Ideal von $\mathfrak{L}(K)$ und somit $f^4 = 0$ für alle $f \in \mathfrak{L}(K)$.

Korollar 2. In der Situation von (1.6) nehmen wir an, E habe ordnungsstetige Norm. Dann läßt sich E

in die direkte Summe der Projektionsbänder N und A zerlegen, wobei N und A die folgenden Bedingungen erfüllen:

N ist ein nilpotentes Strukturideal und A ist ein Strukturideal mit $x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$ in A.

Beweis.

Sei $M := \{ t \in U : \varphi(t) = t = \psi(t) \}$. M ist abgeschlossen und enthält $\varphi\psi(U) \cap U$. Ferner sei $N = \{ f \in \mathfrak{L}(K) : f(M) = 0 \}$. Für alle $f \in N$ gilt $f^4 = 0$, und es ist leicht zu sehen, daß N ein algebraisches Ideal ist. Sei $A = N^{\perp}$, $g \in A$ und $h \in \mathfrak{L}(K)$. Ist $t \in M^c$, so ist $g(\varphi(t)) = g(\psi(t)) = 0$ und somit $g * h(t) = h * g(t) = 0$. Daraus folgt, daß A ein algebraisches Ideal ist. Sei nun $g \in A$, $g \neq 0$; dann ist $g^2(t) = 0$ für alle $t \in M^c$ und $g^2(t) = q(t)(g(t))^2$ für alle $t = \varphi(t) = \psi(t)$. Somit ist alles gezeigt.

Bemerkung: Wie wir in (2.8) sehen werden, ist A ein atomares Projektionsband und $(A,*)$ läßt sich darstellen als ein Funktionenverband versehen mit der punktweisen Multiplikation.

§ 2 f-Banachverbandsalgebren

In diesem Paragraphen sollen diejenigen Banachverbandsalgebren charakterisiert werden, die sich als Banachverbände von Funktionen, versehen mit der punktweisen Multiplikation, darstellen lassen. Als geeignetes Hilfsmittel für diese Charakterisierung wird sich der Begriff des Zentrums eines Banachverbandes erweisen. Ist E ein Banachverband, so bezeichnet man mit Zentrum von E das von der Identität erzeugte Ordnungsideal in $\mathcal{L}(E)$. Versehen mit der von $\mathcal{L}(E)$ induzierten Struktur ist das Zentrum von E eine Banachverbandsalgebra, isomorph zu $(C(K),\cdot)$ für ein passendes Kompaktum K. Es wird sich herausstellen, daß eine Banachverbandsalgebra genau dann eine solche Darstellung besitzt, wenn sie sich in ihr Zentrum einbetten läßt (siehe 2.6). Als erstes beweisen wir ein einfaches Lemma:

2.1 Lemma. Sei E ein normierter Vektorverband und T ein beschränkter positiver Operator auf E. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) aus $x \perp y$ folgt $Tx \perp y$ für alle $x,y \in E$.

(ii) $T \leq \|T\| I$ (I ist die Identität von $\mathcal{L}(E)$).

(iii) T bildet jedes Ordnungsideal in sich ab.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Man überlegt sich leicht, daß T^n die Bedingung (i) erfüllt , für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun a ein beliebiges Element aus E.

Es ist $a^+ \perp a^-$ und somit $Ta^+ \perp a^-$ wegen (i).

Daraus folgt $Ta^+ \perp Ta^-$ .Somit ist T ein Verbandsmorphismus (siehe Schaefer [1], 2,2.5).

Ferner ist $(Ta + a)^+ = Ta^+ + a^+$, da $Ta^+ + a^+ \perp Ta^- + a^-$ gilt,und weil die Darstellung eines Elementes aus E als Differenz zweier disjunkten positiven Teilen eindeutig ist (siehe Schaefer [1], 2,1.4). Ebenso gilt $(T^n a + a)^+ = T^n a^+ + a^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir nehmen nun an , daß $\| T \| < 1$ ist , und beweisen, daß , unter dieser Annahme , $Tx \leq x$ für alle $x \in E_+$ gilt. Wegen der obigen Überlegungen ist

$(T^2x - x)^+ = (T(Tx - x) + (Tx - x))^+ = T(Tx - x)^+ + (Tx - x)^+ \geq (Tx - x)^+$, da T positiv ist. Durch Induktion schließt man nun , daß $(T^{2^n} x - x)^+ = T^{2^{n-1}} (T^{2^{n-1}} x - x)^+ + (T^{2^{n-1}} x - x)^+ \geq \geq (T^{2^{n-1}} x - x)^+ \geq (Tx - x)^+$ ist . Es ist klar, daß $(Tx - x)^+ = 0$ gelten muß: aus $(Tx - x)^+ > 0$ folgt ein Widerspruch, da die Folge $((T^{2^n} x - x)^+)$ gegen 0 konvergiert.

Für $\|T\| < 1$ gilt also $T \leq I$. Wie man leicht sieht, gilt $T \leq I$, auch wenn $\|T\| = 1$ ist. Somit ist (ii) bewiesen. (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i) sind klar.

Ist E ein normierter Vektorverband und T ein Operator in $\mathcal{L}(E)$, der (2.1,(i)) erfüllt, so werden wir sagen, daß T ein f-Operator ist. Für f-Operatoren auf C(K) gilt die folgende Charakterisierung:

2.2 Lemma. Sei K ein Kompaktum und T ein f-Operator auf C(K). Dann gilt: $T(f)(t) = T(1_K)(t) \cdot f(t)$ für alle $t \in K$ und alle $f \in C(K)$.

Beweis.

Sei $q = T(1_K)$. Wie wir in dem Beweis von (2.1) bemerkten, ist T ein Verbandsmorphismus. Wegen (2, 1.2) existiert eine Abbildung $\varphi : K \longrightarrow K$, die auf der Menge $U = \{t \in K : q(t) > 0\}$ stetig und eindeutig definiert ist, so daß $T(f)(t) = q(t) f(\varphi(t))$ für alle $t \in K$ ist. Wir nehmen an, daß ein $t_o \in U$ mit $\varphi(t_o) \neq t_o$ existiert. Aus dem Lemma von Urysohn folgt, daß es Funktionen f und g in C(K) gibt, so daß $f \perp g$ und $f(\varphi(t_o)) = 1 = g(t_o)$ ist. Dies widerspricht der Annahme $T(f) \perp g$. Aus diesem Widerspruch ergibt sich die Behauptung.

Sei nun E ein Banachverband und T die Differenz R - S,

wobei R und S f-Operatoren auf E sind. Es ist leicht zu sehen, daß T einen Absolutbetrag in $\mathcal{L}(E)$ besitzt, und daß $|T|x = |Tx|$ für alle $x \in E$ gilt. Wegen (2.1) bildet nämlich T jedes Ideal E_x ($x \in E_+$) in sich selbst ab. Sei $x \in E_+$. Wir identifizieren E_x mit C(K) und setzen $q = T(1_K) = R(1_K) - S(1_K)$. Wegen (2.1) ist $Tf = q \cdot f$ und somit ist

$$\sup_{\|f\| \leq 1_K} |Tf| = |q| = |T(1_K)|.$$

Als nächstes definieren wir das Zentrum eines Banachverbandes (für eine vollständige Behandlung des Zentrums eines archimedischen Vektorverbandes siehe Flösser [1]).

2.3 Definition. Sei E ein Banachverband. Das von der Identität erzeugte Ordnungsideal in $\mathcal{L}(E)$ wird Zentrum von E genannt und mit Z_E bezeichnet.

Wegen (2.1) und der obigen Überlegung ist es klar, daß Z_E ein Unterverband von $\mathcal{L}(E)$ (für die Definition eines Unterverbandes eines geordneten Raumes, siehe 2, §2) ist. Es ist auch leicht zu sehen, daß die Summe und die Komposition zweier Operatoren aus Z_E wieder in Z_E liegen. Wir beweisen ein einfaches Lemma, aus dem sich eine Charakterisierung von Z_E ergibt.

2.4 Lemma. Sei K ein Kompaktum. Ferner sei $*$ eine bipositive Multiplikation auf $C(K)$, so daß $(C(K),*)$ eine Banachverbandsalgebra ist. Wirkt 1_K als die algebraische Einheit von $(C(K),*)$, so ist $*$ die punktweise Multiplikation.

Beweis.

Sei $f \in C(K)_+$. Es existiert $n \in \mathbb{N}$, so daß $f \leq n\, 1_K$ ist. Aus der Positivität von $*$ folgt, daß $f * g \leq n(1_K * g)$ ist. Aber $1_K * g = g$ nach Voraussetzung. Daraus folgt, daß der Operator $T_f : C(K) \longrightarrow C(K)$, definiert durch $T_f(g) = f * g$ für alle $g \in C(K)$, ein f-Operator ist. Somit ist (wegen 2.2) $f * g(t) = f * 1_K(t)g(t) = f(t)g(t)$ für alle $t \in K$. Daraus und aus der Tatsache, daß der positive Kegel von $C(K)$ erzeugend ist, folgt die Behauptung.

2.5 Satz. Sei E ein Banachverband. Versehen mit der von $\mathcal{L}(E)$ induzierten Struktur ist Z_E eine Banachverbandsalgebra und es existiert ein Kompaktum K, so daß $Z_E \cong (C(K),\cdot)$ ist.

Beweis.

Die Norm von $\mathcal{L}(E)$ stimmt auf Z_E mit der Eichfunktion des Intervalls $[-I, I]$ überein. Somit ist Z_E ein AM-Raum mit Einheit. Die Behauptung folgt aus (2, 1.1) und (2.4).

Nach diesen vorbereitenden Überlegungen können wir den folgenden Satz beweisen:

2.6 Satz. Für eine Banachverbandsalgebra $(E,*)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $(E,*)$ ist starkregulär und für jedes $0 \neq x \in$ gilt $x^2 \neq 0$.

(b) $x \perp y$ ist äquivalent zu $x * y = 0$ für alle $x,y \in E$.

(c) aus $x \perp y$ folgt $a * x \perp y$ und $x * a \perp y$ für alle $x,y \in E$ und $a \in E_+$, und für jedes $a \in E$ existiert $x \in A$ mit $a * x \neq 0$.

(d) Λ (bzw. P) ist ein (kontraktiver) Strukturisomorphismus von $(E,*)$ in Z_E.

(e) es existiert ein Kompaktum K und ein kontraktiver Strukturisomorphismus von $(E,*)$ in $(C(K),\cdot)$.

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): Wegen (1.1) ist die Multiplikation mit positiven Element ein Verbandshomomorphismus. Für alle $x,y \geq 0$ gilt $x * y \leq x * y + y * x \leq$ $\leq x^2 + y^2 - (x - y)^2 \leq x^2 + y^2$. Somit ist $x * y \leq$ $\leq x^2 + y^2$. Wir nehmen an, daß $x \wedge y = 0$ ist. Dann ist $0 \leq x * y = x * y \wedge (x^2 + y^2) \leq (x * y \wedge x^2) +$ $+ (x * y \wedge y^2) = x * (x \wedge y) + (x \wedge y) * y = 0$.

Gilt dagegen $x * y = 0$, so ist $(x \wedge y)^2 =$
$= x^2 \wedge x * y \wedge y * x \wedge y^2 = 0$. Daraus folgt, wegen
(a), daß $x \wedge y = 0$ ist. Da $|x * y| = |x| * |y|$ für
alle $x,y \in A$ gilt, ist (b) bewiesen.
(b) $\Rightarrow$ (c): Seien $x,y \in E$, so daß $x \perp y$ gilt, und $a \in E_+$.
Wegen (b) und der Assoziativität der Multiplikation
gilt $(a * x) * y = a * (x * y) = 0$ und somit
$a * x \perp y$. Der zweite Teil von (c) folgt unmittelbar aus (b): ist $0 \neq x \in A$, so gilt $0 \neq x \wedge x = x$
und somit $x^2 \neq 0$.
(c) $\Rightarrow$ (d): Wegen (c) ist Λa (bzw. Pa) ein f-Operator
und somit (wegen 2.1) ein Element von Z_E für jedes
$a \in E_+$. Da der positive Kegel von E erzeugend ist,
bildet Λ (bzw. P) E in Z_E ab. Wegen (c) und (1.1)
ist $(E,*)$ starkregulär und somit (1.3, Korollar)
ist Λ (bzw. P) ein Verbandsmorphismus. Da $(E,*)$
annullatorfrei ist, ist Λ (bzw. P) ein Strukturisomorphismus.
Da $\|\Lambda a\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x * a\| \leq \|a\|$ (analog für P) ist Λ (bzw. P) kontraktiv.
(d) $\Rightarrow$ (e): Folgt aus (2.5).
(e) $\Rightarrow$ (a): Ist klar.

In Analogie zur Terminologie von Birkhoff ([2])
definieren wir:

2.7 Definition. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra. Gilt $\Lambda a \in Z_E$ und $Pa \in Z_E$ für jedes $a \in E$,

so heißt $(E,*)$ eine f-Banachverbandsalgebra.

Als nächstes betrachten wir den Fall einer f-Banachverbandsalgebra $(E,*)$, wobei die Norm von E ordnungsstetig ist. Es ist nicht schwer zu sehen, daß E ein atomarer Banachverband ist. Es sei daran erinnert, daß ein Banachverband E atomar heißt, wenn er ein maximales Orthogonalsystem $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ besitzt, so daß jedes Hauptideal E_{x_α} eindimensional ist.

2.8 Satz. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra mit ordnungsstetiger Norm. Ist $(E,*)$ eine f-Banachverbandsalgebra, so ist E ein atomarer Banachverband.

Beweis.

Wir identifizieren $(E,*)$ mit einer Unterverbandsalgebra von $(C(K),\cdot)$, wie in dem Beweis von (2.6), wobei $(C(K),\cdot) \cong Z_E$ ist. Für jeden Punkt $t \in K$ definiert die Auswertungsabbildung δ_t, gegeben durch $\delta_t(f) = f(t)$ für jedes $f \in C(K)$, einen Verbandsmorphismus auf $C(K)$ und somit auf E. Für jedes $t \in K$ ist δ_t stetig und somit auch ordnungsstetig auf E. Die Menge $\{\delta_t : t \in K\}$ trennt E. Es folgt aus (Wolff [2]), daß E atomar ist.

Als letztes wollen wir nun einige Beispiele von f-Banachverbandsalgebren angeben, die in der Literatur eine wichtige Rolle spielen. Sie sind alle darstellbar als Banachverbände von stetigen Funktionen auf Kompakta, mit der punktweisen Ordnung und der punktweisen Multiplikation. Interessant ist dabei die Norm. Damit eine Norm mit einer solchen algebraischen und verbandstheoretischen Struktur verträglich ist, muß sie stets feiner als die Supremumsnorm sein (siehe 2.6 (d) und (e)).

Beispiele

2.9 Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum und $C_o(X)$ der Raum aller stetigen im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf X. Versehen mit der punktweisen Ordnung und der Supremumsnorm, ist $C_o(X)$ ein Banachverband. Versehen mit der punktweisen Multiplikation $\cdot$, ist $(C_o(X),\cdot)$ eine annullatorfreie f-Banachverbandsalgebra und somit (2.6) kontraktiv in ihr Zentrum einbettbar. In diesem Fall ist $(C(\beta X),\cdot)$ das Zentrum und die Einbettung ist eine Isometrie. Die naheliegende Vermutung, daß jede f-Banachverbandsalgebra

ohne algebraische Einheit als $(C_o(X),\cdot)$ darstellbar sei, hat sich als falsch erwiesen. Dies zeigt das folgende Beispiel. Aus den Ergebnissen dieses Kapitels folgt diese Charakterisierung:
Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra. Genau dann ist $(E,*)$ zu $(C_o(X),\cdot)$ isomorph, wenn $(E,*)$ eine f-Banachverbandsalgebra ist, die die Adjunktion einer algebraischen Einheit zuläßt. Oder auch, wenn $(E,*)$ die Adjunktion einer Struktureinheit zuläßt.

2.10 Sei $1 \leq p < \infty$ und ℓ^p der Banachverband aller p-summierbaren Folgen, mit der punktweisen Ordnung und der Norm $\| (x_n) \| = (\sum_{n=o}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ für alle $(x_n) \in \ell^p$. Für die punktweise Multiplikation auf ℓ^p gilt $(x_n)\cdot(y_n) \in \ell^p$ für alle $(x_n),(y_n) \in \ell^p$. Es ist nämlich $\sum_{o}^{k} |x_n\, y_n|^p = \sum_{o}^{k} |x_n|^p |y_n|^p \leq (\sum_{o}^{k} |x_n|^p)(\sum_{o}^{k} |y_n|^p)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, daß $(\ell^p,\cdot)$ eine Banachverbandsalgebra ist. Das Zentrum von ℓ^p ist $(\ell^\infty,\cdot)$.

§3 Banachverbandsalgebren mit einer algebraischen Einheit

Die bisher erhaltenen Resultate über Banachverbandsalgebren , die starkregulär oder gar f-Banachverbandsalgebren sind , wenden wir nun auf die Untersuchung von Banachverbandsalgebren mit einer (positiven) algebraischen Einheit an . Besitzt eine Banachverbandsalgebra $(E,*)$ eine Struktureinheit (siehe 3,1.10) so ist sie zu $(C(K),\cdot)$ isomorph für ein passendes Kompaktum K . Dies folgt aus dem Darstellungssatz von Kakutani für AM-Räume mit Einheit und (2.4). Als nächstes nehmen wir an, daß $(E,*)$ starkregulär ist. Besitzt $(E,*)$ eine algebraische Einheit $e \geq 0$, so ist e zwangsläufig eine normierende Ordnungs-Einheit von E. Diese ist die Aussage des folgenden Satzes. Daraus ergeben sich Resultate für den allgemeinen Fall .

3.1 Satz. Sei $(E,*)$ eine starkreguläre Banachverbandsalgebra, die eine algebraische Einheit $e \geq 0$ besitzt. Aus $\|x\| \leq 1$ folgt $|x| \leq e$ für alle $x \in E$.

Beweis.

Es genügt die Implikation für positive Elemente zu beweisen. Sei also $x \geq 0$ und $\|x\| < 1$. Gilt $x \leq e$ nicht, so ist $(x - e)^+ > 0$. Da $x \geq 0$ gilt, so gilt auch $(x + e) \geq 0$. Somit ist die Multiplikation mit $(x + e)$ ein Verbandsmorphismus wegen (4, 1.1). Deshalb erhalten wir: $(x^2 - e)^+ = ((x + e)(x - e))^+ = (x + e)(x - e)^+ \geq$ $\geq (x - e)^+ > 0$. Durch Induktion schließen wir, daß $(x^{2^n} - e)^+ = (x^{2^{n-1}} + e)(x^{2^{n-1}} - e)^+ \geq (x^{2^{n-1}} - e)^+ \geq$ $\geq (x - e)^+ > 0$ ist. Es folgt andererseits aus der Stetigkeit der Operationen und aus der Annahme $\|x\| < 1$, daß $\lim_{n \to \infty} (x^{2^n} - e)^+ = 0$. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß $x \leq e$ ist.

Wie man leicht sieht, gilt $x \leq e$ auch, wenn $\|x\| = 1$ ist.

Korollar 1. Eine starkreguläre Banachverbandsalgebra, die eine albebraische Einheit $e \geq 0$ besitzt, ist zu $(C(K), \cdot)$ isometrisch isomorph für ein passendes Kompaktum K.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (2, 1.1), (2.4) und (3.1).

Korollar 2. Sei $(E, *)$ eine Banachverbandsalgebra

mit einer algebraischen Einheit $e \geq 0$. Ist e ein quasi-innerer Punkt von E, so ist e auch normierende Ordnungseinheit von E. .

Beweis.

Wir zeigen, daß $(E,*)$ starkregulär ist und wenden (3.1) an. Sei K der Strukturraum von E. Versehen mit der Norm, die durch die Eichfunktion des Intervalls $[-e, e]$ definiert wird, ist das von e erzeugte Ideal E_e ein Banachverband isomorph zu C(K) für ein passendes Kompaktum K. Wegen der Positivität von * ist $(E_e,*)$ eine Unterverbandsalgebra von $(E,*)$. Wegen (2.4) ist $(E_e,*)$ isomorph zu $(C(K),\cdot)$. Aus der zweiseitigen Stetigkeit der Multiplikation folgt, daß auch $(E,*)$ starkregulär ist.

Korollar 3. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra mit einer algebraischen Einheit $e \geq 0$. Dann enthält $(E,*)$ eine nichttriviale abgeschlossene Unterverbandsalgebra $(D,*)$ isometrisch isomorph zu $(C(K),\cdot)$ für ein Kompaktum K. Ist die Norm von E ordnungsstetig, so ist D ein endlichdimensionales Projektionsband.

Beweis.

Sei D der Abschluß des Ordnungsideals E_e.

Es ist klar, daß $(D,*)$ eine Banachverbandsalgebra ist, die die Bedingungen von Korollar 2 erfüllt. Sei K ein Kompaktum, so daß $(D,*)$ und $(C(K),\cdot)$ isomorph sind. Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache, daß die Supremumsnorm nur dann ordnungsstetig ist, wenn K diskret ist.

Bemerkung. Sei (X,Ω,μ) ein Maßraum, wobei μ ein diffuses Maß ist und X mehr als einen Punkt enthält. Sei $*$ eine Multiplikation auf $L^1(X,\mu)$, so daß $(L^1(X,\mu),*)$ eine Banachverbandsalgebra ist. Wegen Korollar 3 enthält $(L^1(X,\mu),*)$ keine algebraische Einheit.

5 Faltungsalgebren

Der in (4.1.5) behandelte Multiplikationsoperator ist ein Verbandsmorphismus auf einem AM-Raum . Im gewissen Sinne dazu dual ist der Begriff eines L-Morphismus auf einem AL-Raum. Er wird folgendermaßen definiert:

1.1 Definition: Sei E ein AL-Raum und T ein positiver Operator von E in E. T heißt L-Morphismus, falls er die Bedingungen erfüllt:

(a) T ist intervallerhaltend.

(b) $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in E_+$.

Das folgende Lemma erläutert das Verhalten von L-Morphismen .

1.2 Lemma. Seien K und L kompakte Räume, φ eine stetige Abbildung von K in L und $T: C(L) \longrightarrow C(K)$ der Operator definiert durch $Tf = f \circ \varphi$ für alle $f \in C(L)$. Der zu T adjungierte Operator $T': \mathcal{M}(K) \longrightarrow \mathcal{M}(L)$ ist ein L-Morphismus und $T'\mu(V) = \mu(\varphi^{-1}(V))$ für jede Borelmenge V in L.

Beweis.

T ist ein Verbandsmorphismus und $T1_L = 1_K$. Daraus folgt, daß T' intervallerhaltend ist (2,2.1). Ferner gilt:

$\langle 1_L, T'\mu \rangle = \langle 1_K, \mu \rangle = \|\mu\|$ für alle $\mu \geq 0$ in $\mathcal{M}(K)$.

Ist V eine Offene Menge in L, so ist $T'\mu(V) =$

$$= \sup_{\substack{0 \leq f \leq \chi_V \\ f \in C(K)}} \langle T'\mu, f \rangle = \sup_{\substack{0 \leq f \leq \chi_V \\ f \in C(K)}} \langle \mu, f \circ \varphi \rangle = \mu(\varphi^{-1}(V)).$$

Daraus folgt $T'\mu(V) = \mu(\varphi^{-1}(V))$ für jede Borelmenge V in K.

Ist nun T ein L-Morphismus von $\mathfrak{M}(K)$ in $\mathfrak{M}(L)$ so ist T' ein Verbandsmorphismus von $C(L)''$ in $C(K)''$.

Für weitere Eigenschaften von L-Morphismen siehe Taylor [11]. Von Taylor stammt auch die folgende Definition:

1.3 Definition. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra, wobei E ein AL-Raum ist. Ferner sei $M: E \hat{\otimes}_p E \longrightarrow E$ der zu * assoziierte Multiplikationsoperator. $(E,*)$ heißt Faltungsalgebra, falls M ein L-Morphismus ist ($E \hat{\otimes}_p E = E \hat{\otimes}_\pi E$ ist ein AL-Raum).

Taylor hat eine Charakterisierung aller kommutativen Faltungsalgebren angegeben (siehe Taylor [1] und [2]). Die Verwendung der Dualitätstheorie von Banachverbänden und des Satzes (2,2.1) ermöglicht es, den Satz von Taylor im wesentlichen auf die Charakterisierung der Verbandsmorphismen auf C(K) (siehe 2,1.2) zu reduzieren. Für die Anregung, den Satz im Rahmen dieser Arbeit zu behandeln, bedanken wir uns bei Herrn Prof. Dr.Schaefer.

1.4 Lemma. Sei $(E,*)$ eine Banachverbandsalgebra und $M : E \hat{\otimes}_\pi E \longrightarrow E$ ihr Multiplikationsoperator. Ein Element $x' \in E'$ definiert eine multiplikative Linearform auf E genau dann, wenn $M'x' = x' \otimes x' \in E' \otimes E' \leq \mathcal{L}^r(E,E')$.

Beweis:

Sei $x' \in E'$. $M'x'$ ist der Operator von E in E' definiert durch $(M'x')x = x'_x$, wobei $\langle y, x'_x \rangle = \langle x * y, x' \rangle$ für $x,y \in E$ (siehe 3 , 1.6). Daraus folgt $\langle x * y, x' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, x' \rangle = \langle y, (x' \otimes x')x \rangle$ genau dann wenn $x'_x = (x' \otimes x')x$ für alle $x \in E$ ist.

Der nächste Satz folgt unmittelbar aus (1.2) .

1.5 Satz. Sei S eine kompakte Halbgruppe (für die Verknüpfung $(s,t) \mapsto st$ für alle $(s,t) \in S \times S$) und $\blacktriangle : \mathcal{M}(S) \times \mathcal{M}(S) \longrightarrow \mathcal{M}(S)$ definiert durch $\langle f, \mu \blacktriangle \nu \rangle = \iint f(st)d\mu(s)d\nu(t)$ für alle $(\mu,\nu) \in \mathcal{M}(S) \times \mathcal{M}(S)$ und $f \in C(S)$. Dann ist $(\mathcal{M}(S), \blacktriangle)$ eine Faltungsalgebra.

Beweis.

Der Operator $T : C(S) \longrightarrow C(S \times S)$, definiert durch $Tf(s,t) = f(st)$ für alle $(s,t) \in S \times S$, ist ein Verbandsmorphismus. Somit ist $T' : \mathcal{M}(S \times S) \longrightarrow \mathcal{M}(S)$ ein L-Morphismus. Die Einschränkung M von T' auf das Band $\mathcal{M}(S) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{M}(S)$ ist der zu $\blacktriangle$ assoziierter Multiplikationsoperator. Somit ist alles gezeigt.

1.6 Satz. (Taylor) Sei $(E,\cdot)$ eine kommutative Faltungsalgebra. Es existiert eine kompakte abelsche Halbgruppe S und ein L-Morphismus $\Psi: E \to \mathcal{M}(S)$, so daß gilt:

(a) Ψ ist ein algebraischer Morphismus.

(b) Ψ bildet E auf ein schwach-$*$ dichtes Band von $\mathcal{M}(S)$ ab.

Beweis.

Der Dual E' von E ist ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit. Es existiert also ein kompakter Raum X, so daß $E' = C(X)$. Man kann $C(X \times X)$ mit einer Unterverbandsalgebra von $\mathcal{L}(E,C(X))$ identifizieren (siehe 2, § 2). Sei A die lineare Hülle aller multiplikativen Linearformen auf E. Offensichtlich ist $(\overline{A},\cdot)$ eine Unterverbandsalgebra von $(C(X),\cdot)$, die die Funktion 1_X enthält. Es existiert eine abgeschlossene Äquivalenzrelation "$\sim$" auf X, so daß $\overline{A} = C(X/\sim)$. Wir setzen $S = X/\sim$ und bezeichnen mit φ die Quotientenabbildung von X in S. Der Operator $f \mapsto f\circ\varphi$ von $C(S)$ in $E' = C(X)$ ist ein Verbandsmorphismus. Der dazu adjungierte Operator von E'' in $\mathcal{M}(S)$ ist daher ein L-Morphismus. Seine Einschränkung Ψ auf E ist ebenfalls ein L-Morphismus, da E ein Band in E'' ist. Ist $M : E \otimes_\rho E \to E$ der Multiplikationsoperator, so bildet M' die Banachverbandsalgebra $C(S)$ in $C(S)\otimes C(S) \leq C(X \times X)$ ab (siehe 1.4).

Der Operator $T : C(S) \to C(S \times S)$ definiert durch $Tg(\varphi(s),\varphi(t)) = M'g(s,t)$ ist ein Verbandsmorphismus (2, 2.1) und $T1_S = 1_{S\times S}$. Es existiert also eine stetige Abbildung

$(s,t) \to st$ von $S \times S$ in S, so daß $Tg(s,t) = g(st)$ für alle $g \in C(S)$. Wir betrachten X als Teilmenge von E'', mittels der Abbildung $x \to \delta_x$ (δ_x ist gegeben durch $\langle f, \delta_x \rangle = f(x)$ für alle $f \in C(X)$) und S als Teilmenge von $\mathfrak{M}(S)$. Die Arens Multiplikation induziert (durch Komposition mit Ψ) die Verknüpfung $(s,t) \mapsto st$ von $S \times S$ in S. Aus (3, 1.6 & 1.7) folgt, daß S mit dieser Verknüpfung eine abelsche Halbgruppe ist. Seien μ bzw. ν Elemente aus E, aufgefaßt als (normale) Maße auf $C(X)$. Wir bezeichnen mit μ_S bzw. ν_S ihre Einschränkungen auf $C(S)$. Sei g eine Funktion aus $C(S)$. Wir haben $\langle \Psi(\mu \cdot \nu), g \rangle = \langle \mu \otimes \nu, M'g \rangle = \langle \mu_S \otimes \nu_S, Tg \rangle =$ $= \iint g(st) d\mu_S(s) d\nu_S(t) = \langle \mu_S \blacktriangle \nu_S, g \rangle$. Die multiplikativen Linearformen auf E trennen die Punkte von E, da E eine kommutative Banachalgebra ist. Aus der Definition von $C(S)$ folgt also, daß $\Psi(E)$ schwach-$*$ dicht in $\mathfrak{M}(S)$ liegt.

Literaturverzeichnis

Birkhoff G. [1] "Lattice theory", ,3ed ed., Amer. Math.Soc.Colloquium Publications, Providence Rhode Island 1967

[2] (and Pierce P.) "Lattice-ordered rings",An.Acad.Brasil, Ci.28, 41-69 (1956)

[3] (and Mac Lane S.) "A survey of modern algebra",Revised edition , MacMillan:New York 1960

Ellis R. [1] "Lectures on topological dynamics", W.A.Benjamin,New York 1969.

Flösser H.O. [1] "Das Zentrum archimedischer Vektorverbände"(erscheint demnächst)

Fremlin D.H. [1] "Tensor products of archimedean vector lattices.Amer.J.Math 44, 777-798 (1972)

Kakutani S. [1] "Concrete representation of abstract M-spaces",Ann. of Math. 42, 994-1024 (1941).

Krein M. [1] (and Krein S.) "On an inner characteristic of the set of all continuous functions defined on a bicompact Hausdorff space",Dokl.Akad. Nauk. S.S.S.R. 27 ,427-430 (1940)

Lotz H.P. [1]"Zur Idealstruktur in Banachverbänden", Habilitationsschrift, Tübingen 1969

[2]"Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices", T.A.M.S., 211, 85-100, (1975)

[3]"Tensor products and lattice ideals of operators" (erscheint demnächst)

Nagel R.J. [1]"A Stone-Weierstraß theorem for Banach lattices", Studia Math. 47, 75-82 (1973)

[2]"Ordnungsstetigkeit in Banachverbänden", Manuscripta Math. 9, 9-27 (1973)

Schaefer H.H. [1]"Banach lattices and positive operators", Springer, Heidelberg 1974

[2]"Topological vector spaces", 3rd Print, Springer, Heidelberg 1971

[3]"On the representation of Banach lattices by continuous numerical functions", Math.Z. 125, 215-232, (1972)

Schlotterbeck U. [1]"Tensorprodukte von Banachverbänden", Habilitationsschrift, Tübingen 1975

Stone M.H. [1] "Applications of the theory of Boolean rings to general topology", T.A.M.S., 41, 375-481 (1937)

Taylor J. [1] "Measure algebras", Conference Board of the Mathematical Sciences, A.M.S., 16 , 1972

[2] "The structure of convolution measure algebras", T.A.M.S., 119 150-166 (1965)

Wolff M. [1] "Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in Banachverbänden", Math.Ann. 182, 161-169 (1969)

[2] "Vektorwertige invariante Masse von rechtsamenablen Halbgruppen positiver Operatoren", Math.Z. 120, 265-276 (1971)

Zelasko W. [1] "Banach algebras" Elsevier Publ. Comp. Amsterdam-London-New York 1973

Lebenslauf

Am 30.5.1952 wurde ich, Laura Felicia Martignon, als Tochter des Industriellen Remo Martignon und seiner Frau, Maria Luisa, geb. Blengio, in Bogotá (Kolumbien) geboren.

Ich besuchte die Volksschule in Genua (Italien) und anschließend die italienische Schule in Bogotá. Dann wechselte ich zum englischen Gymnasium über und bestand 1967 das Abitur.

Im Wintersemester 1968 begann ich an der Universidad Nacional in Bogotá mit dem Studium der Mathematik und Philosophie. Im Winter 1971 erhielt ich meine Licenciatura (Vordiplom).

Ein Stipendium des Deutschen Akademischen Austauschdienstes ermöglichte mir, mein Studium an der Tübinger Universität im Sommersemester 1972 fortzusetzen.

Im Sommer 1975 legte ich die Diplomprüfung in Mathematik und Philosophie ab.

Während des Jahres 1971 arbeitete ich als Monitor an dem Mathematischen Institut der Universidad Nacional in Bogotá. Später arbeitete ich für drei Semester als ungeprüfte Hilfskraft am Mathematischen Institut in Tübingen und nach dem Diplom für zwei Semester als geprüfte Hilfskraft. Für die Monate April und Mai 1978 wurde ich von der Universidad Autónoma de México ein-

geladen, als "investigador visitante" am Mathematischen Institut tätig zu sein.

Die vorliegende Arbeit über Banachverbandsalgebren entstand unter der Anleitung von Herrn Prof. H.H. Schaefer zwischen Oktober 1975 und Juli 1978 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

Meine akademischen Lehrer in Bogotá waren die Herren Allan da Silva, Charum, Muños, Perez, Takahashi und Tovar

und in Tübingen

Frau Cofman und die Herren Betsch, Breitsprecher, Felscher, Grölz, Hering, Heyer, Nagel, Schaefer, Schlotterbeck, Tamaschke und Wielandt.

Veröffentlichung: "A criterion for the applicability of an integral transform in n-body reaction calculations" (mit T.Seligman), Nucl.Phys.A 286 (1977) 177-181.